Compito di MDAL
12 gennaio 2016

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. 1) Determinare i valori del parametro intero a per cui ha soluzione la congruenza

$$2^x \equiv a \pmod{17}.$$

2) Risolvere la congruenza:

$$2^{5x+3} \equiv 8 \pmod{17}.$$

Calcolo le potenze di 2 mod 17

$2^0 \equiv 1 \quad 2^1 \equiv 2 \quad 2^2 \equiv 4 \quad 2^3 \equiv 8 \quad 2^4 \equiv -1$

$2^5 \equiv -2 \quad 2^6 \equiv -4 \quad 2^7 \equiv -8 \quad 2^8 \equiv 1$

$\Rightarrow o(2) = 8$

Inoltre $2^x \equiv a \ (17) \Leftrightarrow a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm$ ha soluzione

$2^{5x+3} \equiv 8 \ (17)$ Pongo $y = 5x+3$

So che $2^y \equiv 8 \equiv 2^3 (17)$ ha soluzione e le sue sol sono $y \equiv 3 \ (o(2))$ cioè $y \equiv 3 \ (8)$

Da questo, sostituendo si ha $5x + 3 \equiv 3 \ (8)$

$\Rightarrow 5x \equiv 0 \ (8)$ e, poiché $(5,8) = 1$ 5 è inv mod 8, quindi si ottiene $\boxed{x \equiv 0 \ (8)}$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{N}_{10000} = \{1, 2, \dots, 10000\}$.
a) Contare i sottoinsiemi di due elementi di $\mathbb{N}_{10000}$ tali che la somma degli elementi fa 10000.
b) Contare i sottoinsiemi di due elementi di $\mathbb{N}_{10000}$ tali che la somma degli elementi è pari.
c) Quanti sono gli elementi $a \in \mathbb{N}_{10000}$ per i quali si ha $MCD(7, a) = 1$?

a) Sia $A = \{x, y\} \subset \mathbb{N}_{10000}$ con $x + y = 10000$
$\Rightarrow A = \{x, 10000 - x\}$, poiché in un insieme non conta l'ordine degli elementi, posso supporre
$x < y \Rightarrow x < 5000$.
D'altra parte $\forall\ 1 \le x < 5000$ $\{x, 10000 - x\} \subset \mathbb{N}_{10000}$
Quindi i sottoinsiemi cercati sono 4999.

b) $A = \{a, b\}$: $a + b \equiv 0 \ (2)$
Posso avere che sia a che b sono pari, e per questi insiemi ho $\binom{5000}{2}$ possibilità
o che a e b sono entrambi dispari e anche per questi insiemi ho $\binom{5000}{2}$ possibilità
$\Rightarrow \binom{5000}{2} + \binom{5000}{2}$

c) Sia $a \in \mathbb{N}_{10000} \Rightarrow (a,7) \begin{cases} 1 \\ 7 \end{cases}$ e $(a,7) = 7 \Leftrightarrow$
$7 | a$. Conto quindi i multipli di 7 in $\mathbb{N}_{10000}$
cioè risolvo $1 \le 7b \le 10000$
$\frac{1}{7} \le b \le \frac{10000}{7} \Leftrightarrow 1 \le b \le 1428 \Rightarrow$ gli $a \in \mathbb{N}_{1000}$

tali che $7 \mid a$ sono quelli del tipo $a = 7b$ e sono 1428, di conseguenza gli elementi $a \in \mathbb{N}_{10000}$ per cui $(a, 7) = 1$ sono tutti gli altri e quindi sono $10'000 - 1428 = 8572$

Esercizio 3. Sia $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sia W il sottoinsieme di V formato da tutti i suoi elementi che hanno le prime due componenti uguali a zero.

1. Qual è la dimensione di V?

2. È vero o no che W è un sottospazio vettoriale?

3. Si calcoli una base di W.

1. $V = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ Eliminazione di Gauss sulla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 pivot, l'immagine ha dimensione 3

$\boxed{\dim V = 3}$

2. $W = \left\{ v \in V : v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right\}$.

$\boxed{\text{Sì}}$, perché soddisfa la definizione di sottospazio vettoriale:

se $w_1, w_2 \in V$ e $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{bmatrix}$, allora

- $w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ che ha le prime due entrate nulle e appartiene a V (perché V è uno spazio vettoriale)
- se λ è un elemento di $\mathbb{R}$, $\lambda w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix} \in W$ analogamente

Inoltre, $0 \in W$ (perché $0 \in V$).

3. <u>Metodo 1:</u> $W = V \cap \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$.

Scriviamo V come kernel: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} \in V \iff \operatorname{rk}\begin{bmatrix}1&2&1&x\\1&2&1&y\\1&2&2&z\\1&3&-1&w\end{bmatrix} < 4.$

Riduciamo a scala la matrice

$$\begin{bmatrix}1&2&1&x\\1&2&1&y\\1&2&2&z\\1&3&-1&w\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&x\\0&0&0&y-x\\0&0&1&z-x\\0&1&-2&w-x\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&x\\0&1&-2&w-x\\0&0&1&z-x\\0&0&0&\boxed{y-x}\end{bmatrix}$$

Il rango è 3 se e solo se $y-x=0$

Quindi $\boxed{V = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}-1&1&0&0\end{bmatrix}}$

$$W \cap V = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

riduzione a scala

Una base di W è $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

<u>Metodo 2:</u> $\begin{bmatrix}0\\0\\z\\w\end{bmatrix} \in V$ se $\operatorname{rk}\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&2&1&0\\1&2&2&z\\1&3&1&w\end{bmatrix} = 3.$

Riducendo a scala, otteniamo $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&-2&w\\0&0&1&z\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore$ rk è sempre 3 per ogni $z, w \in \mathbb{R}$

Quindi $\begin{bmatrix}0\\0\\z\\w\end{bmatrix} \in W$ per ogni $z, w \in \mathbb{R}$. Quindi $W = \left\{ z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\}$

<u>Attenzione</u>: non è automatico che W sia lo span dei vettori ottenuti da v_1, v_2, v_3 ponendo le prime due componenti a 0, cioè $W = \operatorname{span}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&2&2\\1&3&-1\end{bmatrix}$. In questo caso è vero, ma non sempre: per esempio, se ~~$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}$, allora~~ $\to$

Per esempio, se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora

$W = \text{span}(v_1, v_2, v_3) \cap \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{0\}$, mentre

$$\text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \neq \{0\}.$$

Esercizio 4. Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori dell' applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base standard è

$$[L] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\det([L]-xI) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{bmatrix}\right) = (2-x)^3+1+1-3\cdot(2-x) =$$

$$= -x^3+6x^2-12x+8-6+3x+2 = -x^3+6x^2-9x+4.$$

$x=1$ è soluzione.

$$\begin{array}{l|l} -x^3+6x^2-9x+4 & -x^2+5x-4 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & x-1 \\ \cline{1-1} // \quad 5x^2-9x+4 & \\ \quad\;\; 5x^2-5x & \\ \cline{1-1} \quad // \quad -4x+4 & \end{array}$$

$$\det([L]-xI) = (x-1)(-x^2+5x-4) = (x-1)(x-1)(-x+4)$$

Autovalori: $\lambda = 1 \quad m_a(1) = 2$

$\lambda = 4 \quad m_a(4) = 2$

$\boxed{\lambda=1}$: $\cancel{\mathrm{Ker}}([L]-\lambda I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$

$\boxed{\lambda=4}$ $\mathrm{Ker}([L]-\lambda I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono autovettori di autovalore $\lambda=1$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda=4$

$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ sono vettori linearmente indipendenti, e formano una base di $\mathbb{R}^3$.